1. *Пусть функция $\varphi(x)$ является нечетной, то есть*

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Тогда

$$u(0,t) = 0.$$

2. *Пусть функция $\varphi(x)$ является четной, то есть*

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Тогда

$$u_x(0,t) = 0.$$

Доказательство. Доказательство напрямую следует из формулы д'Аламбера.

Именно это написано в конспекте на Тич-ине и это, разумеется, неверно. Про φ написали, а про Ψ забыли. Вот так правильно:

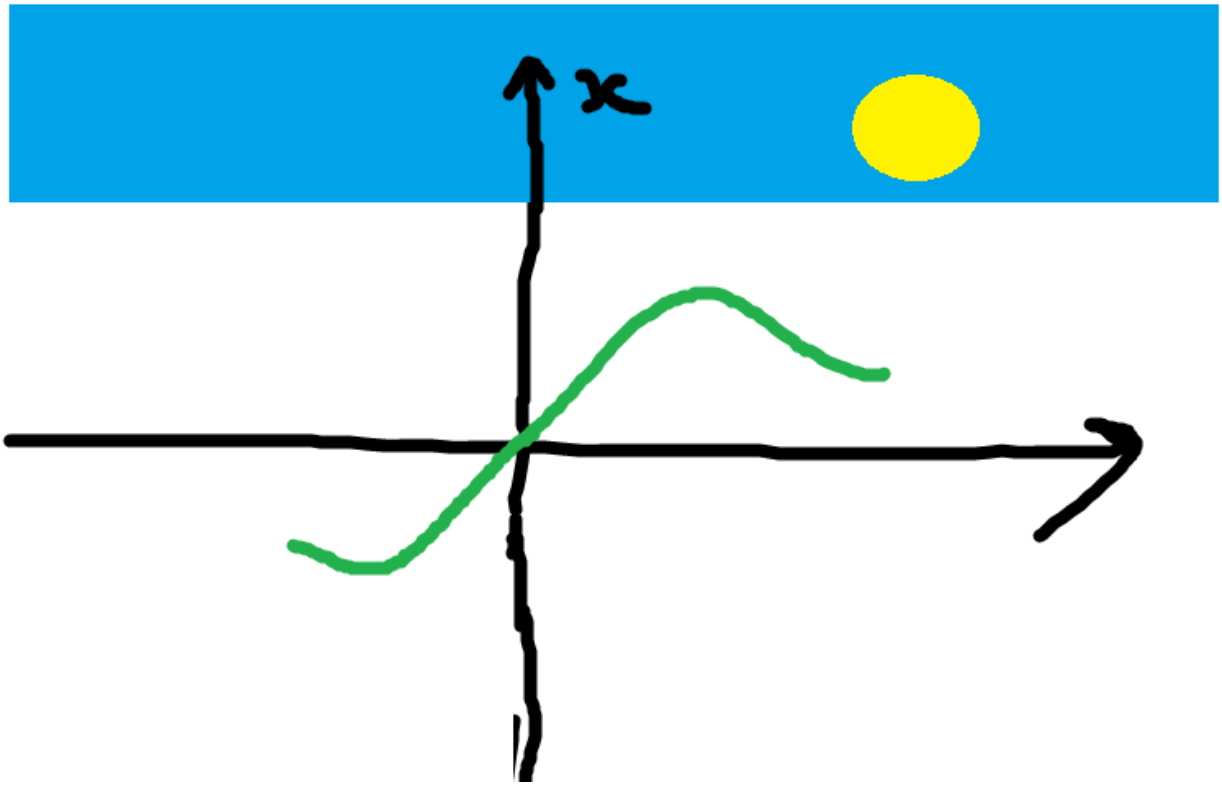
Лемма 1. Если в задаче Коши (17)-(19) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются нечетными функциями относительно $x=0$, то решение этой задачи $u(x,t)$ равно нулю при $x=0$: $u(0,t)=0$.

Лемма 2. Если в задаче Коши (20)-(22) функции $\varphi(x), \psi(x)$ являются четными функциями относительно $x=0$, то производная по x решения задачи $u(x,t)$ равно нулю при $x=0$: $u_x(0,t)=0$.

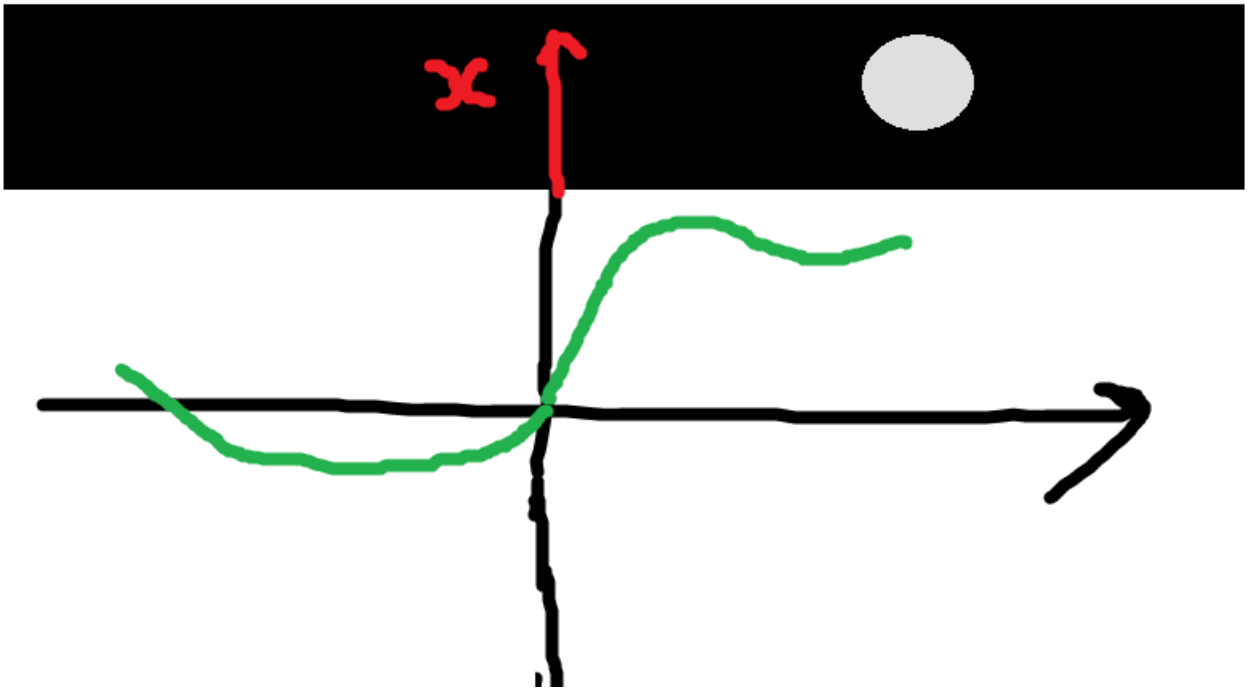
Доказательство: тупо подставьте в формулу Даламбера и убедитесь.

Давайте проанализируем эти утверждения с физической точки зрения.
Лемма 1) φ(x) нечётная => в начальный момент u(x,t) была нечётной функцией. Т.е. в нулевой момент времени струна была в форме графика нечётной функции.
Как и положено нечётным функциям, в нулевой момент времени u(0,t) было 0.
Так вот оказывается, когда мы снимем время с паузы, благодаря тому, что в начальный момент и u(0,t) было нулём, и $u_t(0,t)$ было нулём, это всё будет означать, что u при x=0 останется нулём! Навсегда, в любой момент времени.

Я был просто обязан нарисовать комикс на эту тему.
День, светит солнышко, небо голубое. Начальный момент времени, функция нечётная:



Наступила ночь (вон луну нарисовал):



u, возможно, перестала быть нечётной, но в нуле она до сих пор 0.

Лемма 2) Тут та же история. φ(x) чётная => в начальный момент u(x,t) была чётной функцией. Т.е. в нулевой момент времени струна была в форме графика чётной функции.
Как и положено нечётным функциям, в нулевой момент времени $u_x(0,t)$ было 0.

Так вот оказывается, когда мы снимем время с паузы, u_x при x=0 останется нулём! Навсегда, в любой момент времени.

Эти два обстоятельства нам помогают очень легко решить однородные задачи Дирихле и Неймана на луче. Ведь там от нас как раз хотят, чтобы при x=0 нулём было или u, или u_x.

Для задачи Дирихле продлеваем всё нечётным образом

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

и применяем формулу Даламбера:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(z)dz$$

Для задачи Неймана продлеваем всё чётным образом

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

и применяем формулу Даламбера:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(z)dz$$